Д. Т. Тапкин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

danil.tapkin@yandex.ru

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Пусть $R_1, ..., R_n$ – кольца, K_{ij} – R_i-R_j-бимодули, причем $K_{ii} = R_i$, $i, j = \overline{1..n}$. Предположим, что для любых $i, j, k = \overline{1..n}$, таких что $i \neq k$, $k \neq j$ задан R_i-R_j–бимодульный гомоморфизм

$$\phi_{ikj} : K_{ik} \otimes_{R_k} K_{kj} \to K_{ij}.$$

Для индексов $i = k$ и $k = j$ считаем, что ϕ_{iij} и ϕ_{ijj} – это канонические гомоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} K_{ij} \to K_{ij}, \quad K_{ij} \otimes_{R_j} R_j \to K_{ij}.$$

Допустим также, что выполняется свойство ассоциативности

$$\phi_{ijl}(\phi_{ikj}(a \otimes b) \otimes c) = \phi_{ikl}(a \otimes \phi_{kjl}(b \otimes c))$$

для всех элементов $a \in K_{ik}$, $b \in K_{kj}$, $c \in K_{jl}$ и индексов i, j, k, l.

Обозначим через K множество всех $(n \times n)$-матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij}. Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K является кольцом. Говорят, что кольцо K – *кольцо формальных матриц порядка* n. Если же все K_{ij} равны некоторому R, то получаем кольцо $K_n(R : \{\phi_{ikj}\})$ *формальных матриц над* R. Если в этом случае положить $\eta_{ikj} = \phi_{ikj}(1 \otimes 1)$, то нетрудно проверить что $\eta_{ikj} \in C(R)$.

Ограничимся матрицами размера 3 над R. Возьмем $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C(R)$ и положим $\eta_{213} = \eta_{312} = \beta_1$, $\eta_{123} = \eta_{321} = \beta_2$,

$\eta_{132} = \eta_{231} = \beta_3$. Оставшиеся коэффициенты η_{ikj} однозначно определяются из свойств ассоциативности для ϕ_{ikj}. Полученная структура является кольцом, которое мы будем обозначать $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R)$.

В статье [3] были представлены кольца $M_n(R;s)$ формальных фатриц над R, где $\eta_{ijk} = s^{1+\delta_{ik}-\delta_{ij}-\delta_{jk}}$. Также в [3] рассмотрена проблема изоморфизма. Заметим, что $M_3(R;s) = = M_{s,s,s}(R)$. В качестве обобщения результатов были получены следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть R – кольцо, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C(R)$ и $\pi \in S_3$. Тогда $M_{\beta_1\beta_2\beta_3}(R) = M_{\beta_{\pi(1)}\beta_{\pi(2)}\beta_{\pi(3)}}(R)$.*

Теорема 2. *Пусть R – коммутативное кольцо, $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$, $ann_R(\beta) \subseteq J(R)$. Тогда $M_{\beta\,0\,0}(R) \cong M_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(R)$ тогда и только тогда, когда найдутся $v_1, v_2, v_3 \in \in U(R)$, $\alpha \in Aut(R)$ и разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов $1 = a_1 + a_2 + a_3$ такие, что $\gamma_i = = v_i\alpha(\beta)a_i$.*

Теорема 3. *Пусть R – коммутативное кольцо, $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$, $ann_R(\beta) \subseteq J(R)$. Тогда $M_{\beta\,\beta\,\beta}(R) \cong M_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(R)$ тогда и только тогда, когда найдутся $v_1, v_2, v_3 \in \in U(R)$ и $\alpha \in Aut(R)$ такие, что $\gamma_i = v_i\alpha(\beta)a_i$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П. А., Туганбаев А. А. *Модули над кольцами формальных матриц* // Фундамент. и прикл. матем. – 2009. – Т. 15. – Вып. 8. – С. 145–211.

2. Каш Ф. *Модули и кольца.* – М.: Мир, 1981. – 368 с

3. Tang G., Zhou Y. *A class of formal matrix rings* // Linear Algebra Appl. – 2013. – V. 438. – P. 4672–4688